Ας είναι U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$,
$f : U \to \mathbb{R}$ και $P_0 \in U$.
Αν σε κάποια περιοχή $\Pi_\varepsilon(P_0) \subset U$ του σημείου P_0, υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι της f και είναι φραγμένες, τότε η f είναι συνεχής στο P_0.

// Έστω $(x_1, \dots, x_n) \in \Pi_\varepsilon(P_0) \subset U$, με $P_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$

Τότε:

$$0 \leq |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})| \leq |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_{01}, \dots, x_n)|$$
$$+ |f(x_{01}, \dots, x_n) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_n)| + \dots$$
$$+ |f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0(n-1)}, x_n) - \underbrace{f(x_{01}, \dots, x_{0n})}_{f(P_0)}|.$$

Εφαρμόζω το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, δηλαδή θεωρώ

- $x_2, \dots, x_n = \sigma\tau\alpha\theta$, με $f(x_1, \dots, x_n) - f(x_{01}, \dots, x_n)$
$= f_{x_1}(x_1^*, x_2, \dots, x_n) \cdot (x_1 - x_{01})$ (1) (μεταβλητή το x_1)

- $x_{01}, x_3, \dots, x_n = \sigma\tau\alpha\theta$, με $f(x_{01}, \dots, x_n) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_n)$
$= f_{x_2}(x_{01}, x_2^*, x_3, \dots, x_n) \cdot (x_2 - x_{02})$ (2) (μεταβλητή το x_2)

Επαγωγικά, για $x_{01}, x_{02}, \dots x_{0(n-1)} = \sigma\tau\alpha\theta$, θα είναι

$$\overbrace{\quad}^{=f(P_0)}$$

$$f(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0(n-1)}, X_n) - f(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n})$$

$$= f_{X_n}(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0(n-1)}, X_n^*) \cdot (X_n - X_{0n}) \quad (3) \quad (\text{μεταβλητή το } X_n)$$

, για κάποιο $X_1^* \in (X_{01}, X_1)$, $X_2^* \in (X_{02}, X_2)$, ..., $X_n^* \in (X_{0n}, X_n)$

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, έχω ότι

$$0 \le |f(X_1, \dots, X_n) - f(X_{01}, \dots, X_{0n})| \overset{(1),(2),(3)}{\le} |f_{X_1}(X_1^*, X_2, \dots, X_n)|$$

$$\cdot |X_1 - X_{01}| + |f_{X_2}(X_{01}, X_2^*, X_3, \dots, X_n)| \cdot |X_2 - X_{02}|$$

$$+ \dots + |f_{X_n}(X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0(n-1)}, X_n^*)| \cdot |X_n - X_{0n}|$$

$$\underset{M_i \text{ φράγματα}}{\overset{f_{X_i} \text{ φραγμένες}}{\le}} M_1 |X_1 - X_{01}| + M_2 \cdot |X_2 - X_{02}|$$

$$+ \dots + M_n \cdot |X_n - X_{0n}| \xrightarrow[(X_1, \dots, X_n) \to (X_{01}, \dots, X_{0n})]{} 0$$

, άρα η f είναι συνεχής στο $P_0 = (X_{01}, \dots, X_{0n})$

(Στις (1), (2), (3) το Θ.Μ.Τ εφαρμόζεται μιας και οι αντίστοιχες συναρτήσεις μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$ αντίστοιχα, είναι παραγωγίσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα $[X_{01}, X_1]$, $[X_{02}, X_2]$, ..., $[X_{0n}, X_n]$, εφαρμογής των Θ.Μ.Τ)

, άρα και συνεχείς σε αυτά, ως συναρτήσεις μιας μεταβλητής

– Παραγωγίσιμες λόγω του ότι f μερικώς διαφορίσιμη στο $\Pi_\varepsilon(P_0)$ –

Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in U$.

Αν σε κάποια περιοχή $\Pi_\varepsilon(x_0, y_0) \subset U$ του σημείου (x_0, y_0) υπάρχουν και οι δυο μερικές παράγωγοι της f και είναι φραγμένες, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0)

Λύση

Έστω $(x,y) \in \Pi_\varepsilon(x_0, y_0) \subset U$. Τότε

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)|$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για συναρτήσεις του $\mathbb{R}$, θα έχω

$$y = σταθ \longrightarrow f(x,y) - f(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y)\cdot(x - x_0)$$

$$x_0 = σταθ \longrightarrow f(x_0,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y^*)\cdot(y - y_0)$$

$$\begin{cases} \text{για κάποιο } x^* \in (x_0, x) \text{ ή στο } (x, x_0) \\ \text{για κάποιο } y^* \in (y_0, y) \text{ ή στο } (y, y_0) \end{cases}, \text{ οπότε}$$

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y)\right|\cdot|x - x_0| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y^*)\right|\cdot|y - y_0|$$

φραγμένες μερ. παρ.

$$\leq M_1|x - x_0| + M_2|y - y_0| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$$

, άρα f είναι συνεχής στο (x_0, y_0).